PROBLEMES DE PROBABILITAT*

Jordi Dou Mas de Xexàs

Problema 1. *(Núm 527. Proposat al CM, Vol 6 Núm 3 Març 80. Resolt al Vol 7 Núm 3 Març 81.)*

Sou a la cantonada d'una gran ciutat formada per illes quadrades totes iguals, i voleu passejar. Tireu una moneda enlaire: si surt cara, gireu cap a la dreta, si surt creu, gireu cap a l'esquerra; repetiu aquest procediment a cada cantonada. Quina és la probabilitat que torneu a ser al punt de partida després de caminar n trams?

Solució literal de Jordi Dou. Els trams de lloc senar són tots paral·lels i han de ser-ne la meitat de cada sentit. Anàlogament, els de lloc parell. Per tant n ha de ser múltiple de 4. Tot això per tal de poder tornar al punt d'origen. Està clar que si $n = 4k$, el nombre de camins diferents per a tornar al lloc d'origen sera

$$\binom{2k}{k}^2$$

i el nombre total de camins possibles és $2^{2k} \cdot 2^{2k} = 2^n$. La probabilitat $P(n)$ serà nul·la per a $n \neq 4k$ i, per a $n = 4k$, serà

$$P(n) = \frac{\binom{2k}{k}^2}{2^n}.$$

Barcelona, maig de 1980

* La Societat Catalana de Matemàtiques té la intenció de publicar una selecció de problemes proposats o resolts per Jordi Dou a diverses revistes del món. La col·lecció de problemes de Jordi Dou és de tal magnitud, que la tasca s'haurà de fer de mica en mica. En aquesta edició del llibre comencem a presentar problemes de probabilitat que Jordi Dou va trametre a CRUX MATHEMATICORUM, amb alguns comentaris de l'autor o de l'editor de la revista.

Problema 2. *(Núm 807. Proposat al CM, Vol 9 Núm 1 Març 83. Resolt al Vol 10 Núm 4 Abril 84.)*

Traiem a l'atzar tres boles d'una urna que conté b boles blanques i r boles vermelles. La probabilitat que les tres boles siguin blanques és p. Si l'urna hagués contingut una bola blanca més, la probabilitat de treure'n tres de blanques hagués estat $4p/3$. Trobeu tots els possibles valors de b i r.

Solució literal de Jordi Dou. Tenim

$$p = \frac{b(b-1)(b-2)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}, \quad \frac{4p}{3} = \frac{(b+1)b(b-1)}{(b+r+1)(b+r)(b+r-1)}.$$

Posem $b-2=x$, $b+r-2=y$ i tindrem

$$\frac{3}{4} = \frac{x(y+3)}{y(x+2)} \quad \text{o bé} \quad y = \frac{12x}{9-x} = \frac{108}{9-x} - 12.$$

Els possibles valors de x són 0, 3, 5, 6, 7, 8. Els parells (b,r) possibles són $(5,3)$, $(7,10)$, $(8,18)$, $(9,35)$ i $(10,88)$.

Problema 3. *(Núm 499. Proposat per Jordi Dou al CM Vol 5 Núm 10 Desembre 79. Resolt al Vol 6 Núm 10 Desembre 80.)*

Un cert políedre té totes les arestes de longitud unitat. Una formiga es mou al llarg de les arestes de manera que quan arriba a un vèrtex eligeix sortir-ne, amb igual probabilitat, per una aresta diferent de la d'arribada. El valor mitjà del camí seguit des un vèrtex fins ell mateix és de 6 per uns vèrtexs i de 7.5 per als altres. Trobeu el volum del políedre.

Solució literal de Jordi Dou. Siguin V_i, $(1 \le i \le n)$ els vèrtexs, a_i el nombre d'arestes de cada V_i, $\sum a_i = 2a$, V_s el vèrtex de sortida, E_s^* el valor mitjà de V_s a V_s, E_r^h el valor mitjà de V_r arribant del vèrtex contigu V_h fins a V_s. $E_s^k = 0$. Tindrem $a_s E_s^* = a_s + \sum E_i^s$ (per a tot i tal que V_i sigui contigu a V_s).

$$E_r^h = 1 + \frac{1}{a_r - 1} \sum E_i^r \quad \text{per a tot } i \text{ tal que } V_i \text{ és contigu a } V_r,\ i \ne h.$$

Sumant totes les $2a - a_s + 1$ igualtats tenim $a_s E_s^* = 2a$ ja que qualsevol $E_r^h, (h, r \ne s)$ figura al segon membre de les $a_h - 1$ igualtats

$$E_h^j = 1 + \frac{1}{a_h - 1} \sum E_i^h \quad j \text{ tal que } V_j \text{ és contigu de } V_h,\ j \ne r.$$

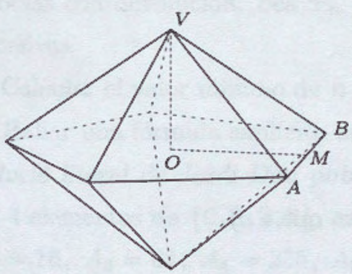
O sigui que, per a tot vèrtex V_k és

$$E_k^* = \frac{2a}{a_k}.$$

Aquest resultat ens diu que només hi ha dos valors diferents entre els a_i, essent el seu quocient 6/7.5. Aquest valors només poden ser 4 i 5. Tindrem $2a = 4\,7.5 = 5\,6 = 30$ d'on $a = 15$. Els nombres n_4 i n_5 de vèrtexs de 4 i 5 arestes, respectivament, han de complir $4n_4 + 5n_5 = 30$ d'on surt $n_4 = 5$ i $n_5 = 2$. Com que el nombre de cares és $10 = 17 + 2 - 7$, seran totes traingles (equilàters) i el políedre estarà format per dues piràmides pentagonals uuides per les bases.

El volnm es calcularà: costat pentàgon= 1, radi $R = 1/10\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$, apotema $\alpha = \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, altura piràmide $h = 1/10\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$,

$$\text{VOLUM:} \quad V = 2\,\frac{1}{3}h\,\frac{5}{2}\alpha = \frac{5}{3}h\alpha = \frac{1}{12}\sqrt{30 + 10\sqrt{5}} \sim 0.603.$$



$\overline{VA} = \overline{AB} = 1$

$\overline{OA} = R = 0.85065$

$\overline{OM} = \alpha = 0.68819$

$\overline{OV} = h = 0.52573$

Barcelona enero 1980

JORDI DOU

Nota de l'editor de CRUX MATHEMATICORUM: "Clearly, the point of this problem was simply to identify the polyhedron in question, and asking point-blank for its volume was nothing but a piece of bravura on the part of the Spanish proposer. *Olé!*"

Problema 4. *(Núm 833. Proposat al CM Vol 9 Núm 4 Abril 83. Resolt al Vol 10 Núm 7 Agost-Setembre 80.)*

a) Quin és l'enter més gran, format per una permutació dels nou dígits no nuls, que és divisible per 99?

b) Quin és el més petit d'aquest nombres divisible per 99?

c) Si els 9 dígits no nuls es posen a l'atzar, quina és la probabilitat que el número que resulti sigui divisible per 99?

d) Responeu les qüestions a), b) i c) si es consideren números formats per tots els deu dígits, excloent els que comencen en 0.

Solució literal de Jordi Dou. Per tal que la permutació sigui divisible per 11 (i per 99), la suma dels 4 dígits que ocupen lloc parell ha de ser 17 (A) o 28 (B). Els nou (A) casos possibles són 1259, 1268, 1349, 1358, 1367, 1457, 2348, 2357 i 2456. Els dos casos (B) possibles són 4789 i 5689.

a) El més gran serà 987652413.

b) El més petit serà 123475869.

El nombre total de 99 serà $(9+2)4!5! = 31680$.

c) La probabilitat buscada serà

$$\frac{31680}{9!} = \frac{11}{2 \cdot 3^2 \cdot 7} \sim 0.0873 \sim \frac{1}{11.45} \left(< \frac{1}{11} \right).$$

Si hi intervenen els deu dígits, els 5 dígits senars seran els ja expressats, agregant-hi el 0 i els seus complementaris. Per al càlcul del nombre de múltiples de 99, s'haurà de restar els nombres que tenen un 0 inicial, que són 31680. O sigui que el nombre total de $\dot{9}9$ serà $2 \cdot 11 \cdot 5!\,5! - 31680 = 285120 (= 9 \cdot 31680)$.

a/d) El màxim serà 9876524130.

b/d) El mínim serà 1024375869.

c/d) La probabilitat serà

$$\frac{285120}{(10! - 9!)} = \frac{9 \cdot 31680}{9 \cdot 9!} = \text{la mateixa que a c)}$$

Barcelona, juny de 1983.

La revista CM no publica la solució de Jordi Dou, segurament per massa succinta, ja que la publicada és molt prolixa. Jordi Dou, però, hi afegeix una nota en castellà, que la revista reprodueix íntegrament en anglès

Nota de l'editor de CRUX MATHEMATICORUM: "Comment by Jordi Dou, Barcelona, Spain. Parts (a), (b), and (c) of this problem were proposed in Madrid in 1933 at an examination for professors in which I took part. We were also asked to find the sum, Σ, of all the numbers concerned (permutations of nine nonzero digits which are divisible by 99). If $\Sigma(A)$ denotes the sum of all those odd-position digits sum to 28, then

$$\Sigma(A) = 9 \cdot 4!\,5! \left(101010101\frac{28}{5} + 10101010\frac{17}{4} \right) = 15\,774\,545\,441\,952;$$

and if $\Sigma(B)$ denotes the sum of all whose odd-position digits sum to 17, then

$$\Sigma(B) = 2 \cdot 4!\,5! \left(101010101\frac{17}{5} + 10101010\frac{28}{4} \right) = 2\,385\,454\,541\,184.$$

Thus

$$\Sigma = \Sigma(A) + \Sigma(B) = 18\,159\,999\,983\,136.$$

It was a pleasure for me to rework this problem on its fiftieth anniversary, but armed, this time, with a calculator and in the tranquillity or retirement."

El problema següent va ser proposat per Jordi Dou en homenatge a l'editor de CRUX, Léo Sauvé. Va ser publicada la proposta i la solució del proponent excepcionalment en castellà.

Problema 5. *(Núm 600. Proposat al CM Vol 7 Núm 1 Gener 81. Resolt al Vol 8 Núm 2 Febrer 82.)* (Popuesta para CRUX dedicada al Prof. Léo Sauvé.)

En una urna hay 4 bolas señaladas con las letras C, R, U, X. Se extraen sucesivamente n bolas con devolución. Sea P_n la probabilidad de que aparezca CRUX en 4 extracciones sucesivas.

a) Calcular el valor mínimo de n para que $P_n > 0.99$.

b) Hallar una fórmula explícita de P_n en función de n.

Solució literal de Jordi Dou publicada al CM. Eutre las 4^n variaciones de ordeu n de los 4 elemeutos de $\{C,R,U,X\}$, sea A_n el número de las que no contienen CRUX. $A_1 = 4$, $A_2 = 16$, $A_3 = 64$, $A_4 = 255$, $A_5 = 1016$, ... y en general $A_n = 4A_{n-1} - A_{n-4}$, ya que entre las A_{n-1} variaciones de orden $n-1$ hay A_{n-4} que terminan en CRU y por tanto

$$A_n = 4\Big(A_{n-1} - A_{n-4}\Big) + 3A_{n-4}.$$

a) Llamando $a_n = A_n/A_{n-1}$, se tiene

$$4 = a_2 = a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n > a$$

siendo $a \neq 0$ el valor que satisface $a^n = 4a^{n-1} - a^{n-4}$. ($a \sim 3.984188231$.)

Sea $\overline{P}_n = 1 - P_n$. Se tendrá $\overline{P}_n = A_n\,4^{-n}$. Sea $p_n = \overline{P}_n/\overline{P}_{n-1}$; tenemos

$$1 = p_2 = p_3 > p_4 > \cdots > p_n > p = a/4 \sim 0.9727478027,$$

$$\overline{P}_{10} = A_{10}\,4^{-10} = 0.9727478027,$$

$$p_{11} = \frac{A_{11}}{4A_{10}} = \frac{4063872}{41020000} = 0.996047058.$$

Tendremos $\overline{P}_{10}\, p^{n-10} < \overline{P}_n < \overline{P}_n\, p_{11}^{n-10}$. Poniendo $\overline{P}_n = 0.01.$,

$$n^{-10} > \frac{\log 0.01 - \log \overline{P}_{10}}{\log p} \sim 1155.7.$$

Vemos que

$$\overline{P}_{1165} > 0.972747\dot{0}.996047^{1155} \sim 0.0100277,$$

y que

$$\overline{P}_{1166} < 0.972748\dot{0}.996048^{1156} \sim 0.0099997,$$

por tanto $P_{1165} < 0.99 < P_{1166}$. Luego $n = 1166$.

b) Sea

$$\varphi(n) = 4^n - \binom{n-3}{1} 4^{n-4} + \binom{n-6}{2} 4^{n-8} - \cdots = \sum_{0 \le i \le n/4} (-1)^i \binom{n-3i}{i} 4^{n-4i}.$$

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene $\varphi(n) = A_n$. Si suponemos $A_i = \varphi(i)$ para $i < n$ se tiene

$$A_n = 4A_{n-1} - A_{n-4} = 4\varphi(n-1) - \varphi(n-4),$$

y siendo

$$4(-1)^i \binom{n-1-3i}{i} 4^{n-1-4i} - (-1)^{i-1} \binom{n-4-3(i-1)}{i-1} 4^{n-4-4(i-1)} = (-1)^i \binom{n-3i}{i} 4^{n-4i},$$

tendremos $4\varphi(n-1) - \varphi(n-4) = \varphi(n) = A_n$. $P_n = 1 - \overline{P}_n = (4^n - A_n)\, 4^{-4i}$, luego

$$P_n = \sum_{1 \le i \le n/4} (-1)^{i+1} \binom{n-3i}{i} 4^{-4i}.$$

Eu una sucesión A_i: A_1, A_2, A_3, A_4, $A_i = 4A_{i-1} - A_{i-4}$, tal que $a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge a$ (que es el caso del problema), claro que las a_i son decrecientes.

El resultado $n = 1166$ de a) puede obtenerse fácilmente de la expresión de P_n hallada en b). Para el cálculo de P_{1166} con error menor que 10^{-6} basta calcular los 20 primeros términos. Claro que el método utilizado en la solución, basado en la rápida convergencia de a_n o p_n es más simple.

Editor's comment.

The linguistic policy of this journal is to publish in French and English only. This time, exceptionally, we decided to honour our distinguished proposer, who recently retired from the Escola Tècnica Superior Arquitectura de Barcelona after a lifetime of service to mathematics and architecture, by publishing his solution in the original Castilian.